

Alumno \_\_\_\_\_

nº matrícula: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse en la hoja del enunciado: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador.

**Ejercicio nº 2.-** Dado un sistema de coordenadas curvilíneas, cuyas coordenadas,  $(u, v, w)$ , están relacionadas con las de un sistema cartesiano ortonormal mediante las relaciones  $\{x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, z = w\}$ , se pide:

1) Determinar las bases natural y recíproca del sistema en la base canónica cartesiana así como sus matrices de Gram. [3 puntos].

2) Calcular los símbolos de Christoffel del sistema curvilíneo en la disposición  $[\Gamma^i_{jk}]_{i=f, j=c, k=m}$  y en la disposición matricial alternativa,  $[\Gamma^i_{jk}]_{i=m, j=f, k=c}$ . [4 puntos].

3) Calcular la expresión de la derivada parcial respecto de  $v$  del campo  $\underline{E}(u, v, w) = u\underline{g}_u + v\underline{g}_v + w\underline{g}_w$  en componentes contravariantes del sistema curvilíneo, usando la técnica de la derivada covariante. [3 puntos].

### Solución:

● 1) La base natural curvilínea de este sistema:

$$\underline{r}(u, v, w) = e^u \cos v \underline{i} + e^u \sin v \underline{j} + w \underline{k} \Rightarrow$$

$$\underline{g}_u(u, v, w) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = e^u \cos v \underline{i} + e^u \sin v \underline{j};$$

$$\underline{g}_v = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = -e^u \sin v \underline{i} + e^u \cos v \underline{j};$$

$$\underline{g}_w(u, v, w) = \underline{k}.$$

Dispuestos matricialmente, se tienen las columnas de la matriz jacobiana:

$$J(u, v, w) = \left[ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right] = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{g}_u & \underline{g}_v & \underline{g}_w \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}} = \begin{bmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v & 0 \\ e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Se observa que:  $\underline{g}_u = e^u \underline{e}_\rho(e^u, v, w) = e^u \underline{g}_\rho(e^u, v, w)$ ,  $\underline{g}_v = e^u \underline{e}_\theta(e^u, v, w) = \underline{g}_\theta(e^u, v, w)$ ,  $\underline{g}_w(e^u, v, w) = \underline{g}_z = \underline{k}$ , donde las bases física y natural cilíndricas se tomarían para  $\rho = e^u$ ,  $\theta = v$ ,  $z = w$ , lo que permite abreviar algunos cálculos y asegurar que la base natural es ortogonal). La base natural recíproca, en la base cartesiana, se obtiene en las filas de  $J^{-1}$ :

$$J^{-1}(u, v, w) = \begin{bmatrix} - & \underline{g}^u & - \\ - & \underline{g}^v & - \\ - & \underline{g}^w & - \end{bmatrix}_{\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}} = \begin{bmatrix} e^{-u} \cos v & e^{-u} \sin v & 0 \\ -e^{-u} \sin v & e^{-u} \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices de Gram son diagonales:

$$G(u, v, w) = J^t \cdot J = \dots = \begin{bmatrix} e^{2u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad G^{-1}(u, v, w) = \begin{bmatrix} e^{-2u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \#.$$

● 2) Los símbolos  $\Gamma^i_{jk}$  son las componentes naturales contravariantes de los vectores  $\frac{\partial \underline{g}_j}{\partial u^k}$ , o sea que deben ser:  $\Gamma^i_{jk} = \underline{g}^i \cdot \frac{\partial \underline{g}_j}{\partial u^k}$ . De este modo, en virtud de la estructura sugerida de las matrices  $J(u, v, w)$  y  $J^{-1}(u, v, w)$  se concluye:

$$\begin{aligned} [\Gamma^i_{j1}]_{i=f, j=c} &= J^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u} J = \begin{bmatrix} e^{-u} \cos v & e^{-u} \sin v & 0 \\ -e^{-u} \sin v & e^{-u} \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v & 0 \\ e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\Gamma^i_{j2}]_{i=f, j=c} &= J^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial v} J = \begin{bmatrix} e^{-u} \cos v & e^{-u} \sin v & 0 \\ -e^{-u} \sin v & e^{-u} \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^u \sin v & -e^u \cos v & 0 \\ e^u \cos v & -e^u \sin v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left[ \Gamma^i_{j3} \right] = J^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial w} J = \begin{bmatrix} e^{-u} \cos v & e^{-u} \sin v & 0 \\ -e^{-u} \sin v & e^{-u} \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la disposición obtenida, la alternativa se obtiene reordenando los símbolos de modo que las tres primeras *filas* de las tres matrices anteriores formen ahora las tres *columnas* de la 1ª caja y así sucesivamente las tres segundas y las tres terceras filas. Concretamente:

$$\left[ \Gamma^1_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \left[ \Gamma^2_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \left[ \Gamma^3_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \#.$$

• 3) Se pide el campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial v} \underline{F}$  en componentes naturales contravariantes. La derivación covariante permite escribir directamente estas componentes en notación indicial, a las que se designa agregando los subíndices “ , 2” a la notación  $F^i$  propia de las componentes contravariantes de  $\underline{F}$  (formulario). O sea:

$$F^i_{,2} = \frac{\partial}{\partial v} F^i + F^h \Gamma^i_{h2} \Rightarrow^{(i \Rightarrow)} \begin{bmatrix} F^1_{,2} \\ F^3_{,2} \\ F^3_{,2} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ 1+u \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que, finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial v} \underline{F} = -v \underline{g}_u + (1+u) \underline{g}_v \quad \#.$$